Erläuterungen zum Bayes-Theorem

Vorbemerkung

Die folgenden Erläuterungen sollen lediglich zur Veranschaulichung der Bayes'schen Rechenvorschrift und ihrem besseren Verständnis für den Laien dienen. Eine mathematische Herleitung des Bayes-Theorems findet sich unter www.schriftvergleichung.com. Der theoretische Zusammenhang zwischen dem Bayes-Theorem und dem Bereich der forensischen Schriftvergleichung wird in einem Aufsatz „Klärungen zur Anwendung des Bayes-Theorems im Bereich der forensischen Schriftvergleichung" hergestellt. ([1])

Untersuchungsfragen und Hypothesenbildung

Schriftvergleichenden Untersuchungen können unterschiedliche Fragestellungen zugrunde liegen, die sich jeweils in anderen Hypothesen niederschlagen. Dazu hier ein paar Beispiele:

- Echtheitsuntersuchung (n = 2 Hypothesen):
  - H1 – die strittige Unterschrift stammt vom Namenseigner
  - H2 – die strittige Unterschrift stammt von einer anderen Person
- Urheberschaftsuntersuchung (n = 3 Hypothesen):
  - H1 – die strittige Unterschrift stammt von Müller
  - H2 – die strittige Unterschrift stammt von Meier
  - H3 – die strittige Unterschrift stammt von Schulze
- Schriftaltersbestimmung (n = 5 Hypothesen):
  - H1 – die strittige Tagebuchseite stammt aus dem Jahr 2011
  - …
  - H5 – die strittige Tagebuchseite stammt aus dem Jahr 2015

Befunde und Häufigkeiten

Nehmen wir an, in einer strittigen Schrift liege unter insgesamt M Befunden ein bestimmter Befund b1 vor. In den meisten Fällen leuchtet es ein, dass eine Person

[1] Zur Publikation eingereicht. Danach: Siehe die Homepage des Autors: Fußnote 12.

P1 umso wahrscheinlicher als Urheber der strittigen Schrift infrage kommt, je häufiger der Befund b1 auch in deren eigener Schrift vorkommt.

Dasselbe gilt aber nicht nur für den Befund b1, sondern es gilt in gleicher Weise auch für beliebige andere Befunde b2, b3 … bM der strittigen Schrift: Die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person an der strittigen Schrift ist umso größer, je häufiger mit dem Befund b1 zugleich auch die weiteren Befunde b2, b3, … in ihrer habituellen Schrift auftreten.

In dieser Aussage steckt eine logische Und-Verknüpfung: Je häufiger die strittigen Befunde b1 **und** b2 **und** b3 … auch beim Schreiber P1 vorkommen, desto wahrscheinlicher ist dessen Urheberschaft.

Die logische **Und-**Verknüpfung ist eine Schwester der Multiplikation. Bei einer binären Skalenauflösung lautet eine einfache Und-Verknüpfung etwa so: Ist ein Ereignis A zutreffend (= 1) **und** ist ein Ereignis B zutreffend (= 1), so ist das Ergebnis zutreffend (= 1). Dies entspricht der Multiplikation 1 * 1 = 1. Die Inversion lautet: Sind entweder das Ereignis A **oder** das Ereignis B oder beide Ereignisse zugleich **nicht** zutreffend (= 0), so ist das Ergebnis **nicht** zutreffend. Dies ergibt sich ebenfalls durch Multiplikation 0 * 1 = 1 * 0 = 0 * 0 = 0.

Ein Übergang von einer binären zu einer analogen Skalenauflösung liegt dann vor, wenn die Ereignisse und das Ergebnis der Verknüpfung nicht nur die Werte [0] oder [1] annehmen können, sondern wenn es sich dabei um nicht-negative, reelle Zahlen aus dem Intervall [0,1] handelt, wie es bei Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten der Fall ist (Axiom der Nichtnegativität).

Dies führt dazu, dass man die (relativen) Häufigkeiten f der einzelnen Befunde in der Schrift des Vergleichsschreibers miteinander zu multiplizieren hat:

$$L_{P1} = \prod_{j=1}^{M} {}^{bj}f(A_{P1}) = {}^{b1}f(H_{P1}) * \ldots * {}^{bj}f(H_{P1}) * \ldots * {}^{bM}f(H_{P1})$$

Jede relative Befundhäufigkeit liegt im Intervall [0,1] und kann dort alle reellen Werte >= 0 annehmen. Unmittelbar sieht man: Je größer die einzelnen Faktoren sind, desto größer ist L. Ist allerdings auch nur einer der Faktoren = 0, so ist das Ergebnis

L = 0. Sind, umgekehrt, alle Faktoren = 1, so ist das Ergebnis L = 1. Dies entspricht also ganz der obigen Darstellung bei binärer Auflösung, nur eben hier auf der analogen Skala der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Ähnlichkeiten (Likelihoods)

Bei dem Produkt L_{P1} handelt es sich um eine sogenannte „Likelihood“. L_{P1} ist gewissermaßen eine Vorform der Hypothesenwahrscheinlichkeit, wenn man so will, eine Protowahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese zutrifft, die strittige Schrift stamme aus der Hand der Person P1. Je ähnlicher sich die strittige Schrift und die Vergleichsschriften der Person P1 sind, desto größer sind die relativen Auftretenshäufigkeiten f der einzelnen strittigen Befunde in den Vergleichsschriften dieser Person, und desto näher kommt der Wert von L an die 1 heran, und umgekehrt.

Die „Ähnlichkeit“ L_{P1} ist allerdings – für sich allein genommen – keine besonders aussagekräftige Zahl, denn auch die Schriften anderer Schreiber weisen eine mehr oder weniger große „Ähnlichkeit“ zur strittigen Schrift auf, je nachdem, wie viele der strittigen Befunde wie oft übereinstimmend vorliegen. Bei einer Abwägung, ob eine strittige Schrift von der Person P1 oder von einer zweiten Person P2 stammt, muss man die Likelihoods der Schriften L_{P1} und L_{P2} der beiden Vergleichsschreiber in Relation zueinander bringen.

Eine Möglichkeit hierzu ist der sog. „Beweiswert“. Er wird definiert als Quotient aus L_{P1} und L_{P2}. Dabei handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Befundkonstellation bei einem Schreiber P1 zur Wahrscheinlichkeit des Auftretens derselben Befundkonstellation bei einem anderen Schreiber P2:

$$B = \frac{L_{P1}}{L_{P2}}$$

Ist B > 1, so spricht das Auftreten der bestimmten Befundkonstellation eher für die Person P1 als Urheber, ist B < 1, kommt eher P2 als Urheber in Betracht.

Wohlgemerkt: Es handelt sich hierbei nicht um die vom Auftraggeber gesuchte Urheberschaftswahrscheinlichkeit! Diese erhält man nur über das Bayes-Theorem für abhängige Ereignisse.

Um die Urheberschaftswahrscheinlichkeit zu ermitteln, ist zu berücksichtigen, dass, sofern man sich auf nur zwei Vergleichsschreiber beschränkt, die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person P1 und die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person P2 sich gegenseitig ergänzen: Letztlich kann die Summe aller einzelnen Hypothesenwahrscheinlichkeiten nicht größer als 1 sein. Dies ist axiomatisch so festgelegt (Axiom der Additivität); die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten ist 1 bzw. 100 Prozent. Wächst die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft von P1, wird die für P2 kleiner. Sie wird 0, wenn die andere 1 wird, und umgekehrt. Gibt es mehr als zwei Schreiber, gilt dasselbe entsprechend.

Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit W_{P1} für das Zutreffen der Hypothese, dass die strittige Schrift von der Person P1 stammt, ergibt sich, indem das Verhältnis der Likelihood L_{P1} **zur Summe** aller Likelihoods gebildet wird:

$$W_{P1} = 100 * \frac{L_{P1}}{\sum_{j=1}^{N} L_{Pj}}$$

Die Normierung mit der Summe der Likelihoods im Nenner führt praktischerweise dazu, dass die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten $\sum_{i=1}^{N} W_{Pi} = 1$ wird. Durch Multiplikation mit dem Faktor 100 wird das Intervall des Wertebereiches für die Wahrscheinlichkeiten auf [0, 100] Prozent transformiert. N ist dabei die Anzahl der Hypothesen.

Anzumerken ist noch, dass die sogenannten A-priori-Wahrscheinlichkeiten keinerlei Wirkung hinsichtlich der Hypothesenwahrscheinlichkeiten entfalten – und zwar aus stochastischen Gründen (nicht etwa aus Gründen der Unbefangenheit)!

Der Rechenalgorithmus

Bei einer schriftvergleichenden Untersuchung mit zwei Vergleichsschreibern läuft die Berechnung

der Wahrscheinlichkeit W_P für die Urheberschaft des bekannten Vergleichsschreibers P	gegenüber	der Wahrscheinlichkeit W_V, dass eine (unbekannte) andere Person Urheber der strittigen Schrift ist

(stark vereinfacht) in den folgenden Schritten ab:

1. Zunächst werden die relevanten strittigen Befunde b_j beschrieben.
2. Dann wird abgezählt, wie oft diese in den Vergleichsschriften der Person P auftreten bzw. nicht auftreten.
3. Daraus werden die relativen Häufigkeiten f und
4. das Produkt L_P aus allen relativen Häufigkeiten berechnet,
5. Zudem wird festgestellt, wie groß die relativen Häufigkeiten der einbezogenen Befunde in den Vergleichsschriften des „anderen Vergleichsschreibers“ sind.
6. Wie zuvor wird auch das Produkt L_V auch aus den zugehörigen relativen Häufigkeiten berechnet.
7. Schließlich ist die Summe $L_P + L_V$ der Produkte zu bilden und
8. die genannte Wahrscheinlichkeit W_P als Quotient $L_P / (L_P + L_V)$ zu berechnen.