Eine Herleitung des Bayes-Theorems

Wahrscheinlichkeit

Das Bayes-Theorem beruht auf drei als absolut richtig anerkannten Grundsätzen, deren innewohnende Wahrheit keines Beweises bedarf: dem Axiom der Nichtnegativität, dem Axiom der Normiertheit und dem Axiom der Additivität. ([1])

Wenn gilt:

(**1**) $0 \leq p(A) \leq 1$ — Axiom der Nichtnegativität

und

(**2**) $p(A) = 1$ für das sichere Ereignis A, — Axiom der Normiertheit

dann heißen die Zahlen p(A) Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des Ereignisses A. ([2])

Ist A ein Ereignis, und setzt sich dieses aus einer Menge disjunkter Teilereignisse A_i zusammen als $A = \{A_1, \dots, A_N\}$, dann errechnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses als Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten $p(A_i)$

(**3**) $p(A) = \sum_{i=1}^{N} p(A_i)$. ([3]) — Axiom der Additivität

Additionssatz

Es seien e und u natürliche Zahlen aus dem Intervall [1,N]. Das Ereignis A_E sei eine Menge aus e Teilereignissen. Das Ereignis A_U sei eine Menge aus $u = N - e$ Teilereignissen. A_E und A_U seien disjunkt. Der vollständige Ereignisraum sei gegeben durch

$$A_E = \{A_1, \dots, A_e\} \qquad \text{bzw.} \qquad A_U = \{A_{e+1}, \dots, A_N\}$$

Dann lauten nach (3) definitionsgemäß die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten dieser Ereignisse:

---

[1] Duden, „Das Fremdwörterbuch“

[2]) nach: Lambacher Schweizer, „Leistungskurs Stochastik“

[3]) ebd.

$$p(A_E) = \sum_{i=1}^{e} p(A_i) \quad \text{und} \quad p(A_U) = \sum_{i=e+1}^{N} p(A_i).$$

Der aus den beiden Ereignissen A_E und A_U sich zusammensetzende Gesamtraum $A = A_E \cup A_U$ besteht aus der Menge aller N zu den Ereignissen A_E und A_U gehörigen Teilereignisse

$$A = A_E \cup A_U = \{A_1, \dots , A_e\} \cup \{A_{e+1}, \dots , A_N\} = \{A_1, \dots , A_e, A_{e+1}, \dots , A_N\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen aus N Teilereignissen bestehenden Gesamtraum A ist definitionsgemäß

$$p(A_E \cup A_U) = \sum_{i=1}^{N} p(A_i).$$

Eine Zerlegung der Summe in Teilsummen führt wieder zurück zu

$$p(A_E \cup A_U) = \sum_{i=1}^{e} p(A_i) + \sum_{i=e+1}^{N} p(A_i),$$

also insgesamt zu

$$p(A_E \cup A_U) = p(A_E) + p(A_U).$$

Es leuchtet ein, dass auf die gleiche Art und Weise jede disjunkte Zerlegung des vollständigen Ereignisraumes A in N einander ausschließende Hauptereignisse zu dem folgenden Additionssatz führt:

(4) $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_N)$

Additionssatz für sich ausschließende Hypothesen

Multiplikationssatz

Der Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten voneinander abhängiger Ereignisse A und B lautet: ([4])

(5) $p(A \cap B) = p(A) * p(B \mid A)$. ([5])

Multiplikationssatz für abhängige Ereignisse

[4]) Siehe z. B.: Lambacher Schweizer, „Leistungskurs Stochastik“, S. 75

[5]) Lies $p(B \mid A)$ wie „Wahrscheinlichkeit für das unabhängige Ereignis B bei gegebenem abhängigem Ereignis A“.

Herleitung des Theorems

Nach Vorbereitung mit den im vorstehenden Kapitel getroffenen Deduktionen lässt sich das Bayes-Theorem nun herleiten.

Gegeben sei ein unabhängiges Ereignis B. Von diesem abhängig entwickele sich ein weiteres Ereignis A, das aus N disjunkten Teilereignissen bestehe:

$$A = \{A_1, \dots , A_N\}.$$

A und B sollen den Ereignisraumes vollständig darstellen und gegenseitig disjunkt sein. Dann ergibt sich damit

$$B = (A_1 \cap B) \;\cup\; \dots \;\cup\; (A_N \cap B).$$

Der zugehörige Wahrscheinlichkeitsausdruck

$$p(B) = p\big((A_1 \cap B) \;\cup\; \dots \;\cup\; (A_N \cap B)\big)$$

ist gemäß Gleichung (4) äquivalent zu

$$p(B) = p(A_1 \cap B) \;+\; \dots \;+\; p(A_N \cap B).$$

Ersetzt man hierin jeden einzelnen Term $(A_i \cap B)$ gemäß (5), dann hat man

$$\textbf{(6)} \qquad p(B) = \sum_{i=1}^{N} p(A_i) * p(B \mid A_i).$$

Weiter lässt sich $(A_i \cap B)$ kommutieren und wegen der definitorischen Gleichrangigkeit formal durch den entsprechenden Ausdruck von (5) ersetzen:

$$p(A_i \cap B) = p(B \cap A_i)$$

$$p(A_i) * p(B \mid A_i) = \qquad\qquad = p(B) * p(A_i \mid B)$$

Aus der letzten Zeile ergibt sich

$$p(A_i \mid B) = \frac{p(A_i)}{p(B)} * p(B \mid A_i).$$

Indem man hierin die A-priori-Wahrscheinlichkeit p(B) gemäß (6) ersetzt, erhält man das Bayes-Theorem in der folgenden allgemeinen Schreibweise: ([6])

[6] Lies $p(A_i \mid B)$ wie „Wahrscheinlichkeit P des i-ten Teilereignisses A_i bei gegebenem Ereignis B.

$$\textbf{(7)}\quad p(A_i \mid B) = \frac{p(A_i) * p(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{N} p(A_j) * p(B \mid A_j)} \quad – \quad \text{wobei i und j} \in [1,N].$$

Gleichverteilung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten für alle betrachteten Hypothesen ist der Normalfall bei schriftvergleichenden Untersuchungen. Dies bedeutet:

$$p(A_p) = p(A) = p(A_q) \text{ für alle } p \neq q \text{ mit } p, q \in [1,N].$$

Damit schreibt sich Gleichung (7) als

$$p(A_i \mid B) = \frac{p(A) * p(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{N} p(A) * p(B \mid A_j)},$$

so dass sich p(A) herauskürzt und sich die A-Posteriori-Wahrscheinlichkeiten allein durch die Likelihoods $p(B \mid A_i)$ ergeben. Eine Multiplikation normiert die Werte auf das Intervall [0, 100] Prozent:

$$\boxed{\textbf{(8)}\quad \mathbf{p(A_i \mid B) = 100 * \frac{p(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{N} p(B \mid A_j)}.}}$$

Vom Theorem zum Algorithmus

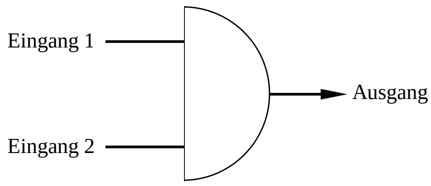
Auch das unabhängige Ereignis B lässt sich zusammengesetzt denken als Menge von M Teilereignissen: $B = \{b_1, \dots , b_M\}$. Alle Teilereignisse b_j seien in einem Zuge entstanden, so dass sie *zugleich manifest* nebeneinander stehen. Dies ist gleichbedeutend mit der logischen Und-Verknüpfung, so dass die Likelihood

(9) $$p(B \mid A_i) \quad \text{als} \quad p(\{B_1 \textit{ und } B_2 \textit{ und } B_3 \textit{ und } \dots\} \mid A_i)$$

geschrieben werden kann.

Die Rechenoperation „Multiplikation“ und die der logischen Und-Verknüpfung sind zueinander äquivalent. Die Äquivalenz zur Multiplikation zeigt sich an der zugehörigen Wahrheitstabelle der logischen Und-Verknüpfung.

Eing. 1		Eing.2		Ausgang
wahr	und	wahr	=	wahr
wahr	und	falsch	=	falsch
falsch	und	wahr	=	falsch
falsch	und	falsch	=	falsch



Sind die Teilereignisse durch Zahlen repräsentiert, kann man darin die Zustände „wahr“ durch die Zahl 0 und „falsch“ durch die Zahl 1 ersetzen. Man erhält auch dann am Ausgang das richtige Ergebnis, wenn man die Eingänge 1 und 2 rechnerisch miteinander multipliziert:

Eing. 1		Eing.2		Ausgang
1	*	1	=	1
1	*	0	=	0
0	*	1	=	0
0	*	0	=	0

Demnach lautet der obige Ausdruck (9), praktikabel als Rechenoperation geschrieben, nunmehr:

(10) $$p(B \mid A_i) = {}^{b1}f(A_i) * \dots * {}^{bj}f(A_i) * \dots * {}^{bM}f(A_i) = \prod_{j=1}^{M} {}^{bj}f(A_i)$$

Darin ist M die Anzahl der abhängigen Teilereignisse, und ${}^{bj}f(A_i)$ ist die relative Häufigkeit (engl. „**f**requency“) des j-ten unabhängigen Teilereignisses bei gegebenem i-tem abhängigem Ereignis A_i. Der Operator Π sagt aus, dass die Likelihood $p(B \mid A_i)$ sich als Produkt all dieser relativen Häufigkeiten ${}^{bj}f(A_i)$ ergibt. ([7])

Setzt man in die Bayes-Formel der Gleichung 8 zur Berechnung der Hypothesenwahrscheinlichkeit die Likelihood aus Gleichung 10 ein, so erhält man bei Gleichverteilung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten als Rechenvorschrift:

---

[7] Das geometrische Mittel aus M Werten ist definiert als die M-te Wurzel aus dem angegebenen Produkt aus den M Faktoren. Demnach stellt Gleichung 10 die Wahrscheinlichkeit des unabhängigen Ereignisses B bei gegebenem abhängigem Teilereignis A_i als M-te Potenz des geometrischen Mittels der abhängigen Teilereignisse, sprich: der relativen Häufigkeiten ${}^{bj}f(A_i)$ dar.

$$(11) \qquad p(A_i \mid B) = 100 * \frac{\prod_{j=1}^{M} {}^{b_j}f(A_i)}{\sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} {}^{b_j}f(A_i)} = 100 * \frac{L_i}{\sum_{i=1}^{N} L_i}$$

Anmerkung:

Im Bereich der forensischen Schriftvergleichung treten an die Stelle der beiden Ereignisse A und B Begriffe, die mit „Hypothesen H“ und „Befundkonstellationen K“ verbunden sind. Als Kurzformen werden meist die Entsprechungen

- H ≡ A für das abhängige Ereignis und
- K ≡ B für das unabhängige

eingesetzt. In einem Aufsatz ([8])

> „Klärungen zur Anwendung des Bayes-Theorems
> im Bereich der forensischen Schriftvergleichung“

wird die semantische Schwäche der Verkürzung beschrieben: In den Kurztermen wird statt des unabhängigen Teilereignisses B selbst eine Hypothese H, also *die Formulierung einer Vermutung zum tatsächlichen Ereignis B* angegeben.

Vor die Wahl gestellt, die semantisch inkorrekten Kurzterme „p(K | H)“ bzw. „p(H | K)“ zu verwenden oder die ausführlichen Ausdrücke p(B | A) bzw. p(A | B) mit korrekt ausformulierten Ereignisbeschreibungen beizubehalten und diese umständlicherweise über längere Textpassagen auszubreiten, mag es hinnehmbar sein, die erstgenannten auch weiterhin zu verwenden – solange man dabei die eigentliche Bedeutung nicht aus dem Auge zu verliert.

Im Wesentlichen wird in dem Aufsatz die statistische Begrifflichkeit auf die Belange der Schriftvergleichung übertragen. Darüber hinaus werden Problemlösungen entwickelt:

„*Bei Anwendung der Bayes-Statistik ist man im Bereich der forensischen Schriftvergleichung mit drei Problemen konfrontiert. Wie oben erläutert, stellt die Interpretation von Hypothesen und Befunden als Ereignisse ein semantisches Problem dar, weil eine mengentheoretische Durchschnittsbildung K ∩ H an sich absurd ist.*

[8] Zur Publikation eingereicht. Danach: Siehe die Homepage des Autors: Fußnote 12.

Ein Grenzwertproblem im Zusammenhang mit den A-priori-Wahrscheinlichkeiten bei Echtheitsuntersuchungen erweist sich als Phantom ohne reale Auswirkungen. Ein Ähnlichkeitsproblem wird mit Hilfe von Linearfaktoren an der Seite der Likelihoods gelöst, indem ein quantitativer Bezug zwischen den relativen Befundhäufigkeiten in der strittigen Schrift und den Vergleichsschriften hergestellt wird.“

Die obige Gleichung 11 zur Ermittlung der Hypothesenwahrscheinlichkeiten wird modifiziert zu Gleichung 26 des Aufsatzes:

$$\mathbf{p(H_i \mid K_M) = 100 * \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - \delta_{ik}) * {}^{bk}f_{+}(H_i)}{\sum_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{M} (1 - \delta_{jk}) * {}^{bk}f_{+}(H_j)}}$$

(M: Anzahl Befunde, N: Anzahl Hypothesen)

bzw. Gleichung 29 des Aufsatzes:

$$\mathbf{p(H_i \mid K_M) = 100 *} \frac{\Delta_i * L_i}{\sum_{j=1}^{N} \Delta_j * L_j}$$

(M: Anzahl Befunde, N: Anzahl Hypothesen)

Definitionen und Erläuterungen hierzu finden sich im Kapitel „Das Ähnlichkeitsproblem …“ des Aufsatzes.